L3 MASS U1CD35 — Université Paris Diderot
Calcul différentiel — 2012 - 2013

Vendredi 19 octobre 2012 **Test n°1**

Durée : une heure.
Documents, calculettes et portables non autorisés.

Questions de cours.

Question de cours 1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Qu'appelle-t-on distance sur E ?
2. Qu'appelle-t-on norme sur E ?
3. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E. Montrer qu'il existe une distance d sur E telle que $\|x\| = d(\mathbf{0}_E, x)$ pour tout $x \in E$, où $\mathbf{0}_E$ désigne le vecteur nul de E.
4. Donner un exemple d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et d'une distance d tels que $x \mapsto d(\mathbf{0}_E, x)$ ne définit pas une norme sur E.

Question de cours 2. Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) des espaces métriques et f une application de E_1 dans E_2. Définir, successivement en français courant et à l'aide de quantificateurs, chacune des propriétés suivantes :

1. f est continue de (E_1, d_1) dans (E_2, d_2)
2. f est uniformément continue de (E_1, d_1) dans (E_2, d_2)
3. f est Lipschitzienne de (E_1, d_1) dans (E_2, d_2)

Donner un exemple simple de fonction continue mais non uniformément continue et d'une fonction uniformément continue mais non lipschitzienne.

Question de cours 3. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Donner trois normes sur $\mathbb{R}[X]$, dont deux au moins sont équivalentes.

Exercices.

Exercice 1. Soient f et g deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = g(0) = 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. La fonction f (resp. g) est-elle continue en x_0 ? Justifier.

Exercice 2. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa norme $\|\cdot\|_\infty$: $\|(x,y,z)\|_\infty = \max\{|x|, |y|, |z|\}$ si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On note :

$$A = \{x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0 \text{ et } x^2 + y^2 + z^3 \leq 1\}.$$

Dire et prouver si A est une partie ouverte (resp. fermée, bornée) de $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$.